

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

6-дәріс. Сызықтық екінші ретті гиперболалық теңдеудің жалпы түріне қойылған Гурса және Коши есептерін шешудің Риман әдісі. Риман функциясы.

Дәрістің мақсаты – сызықтық екінші ретті гиперболалық теңдеудің жалпы түріне қойылған Гурса және Коши есептерін Риман әдісі арқылы шешу болып табылады.

Негізгі сұрақтар:

1. Сызықтық екінші ретті гиперболалық теңдеудің жалпы түріне қойылған Гурса есебін Риман әдісі арқылы шешу.
2. Сызықтық екінші ретті гиперболалық теңдеудің жалпы түріне қойылған Коши есебін Риман әдісі арқылы шешу.
3. Риман функциясы

Сызықтық екінші ретті гиперболалық теңдеудің жалпы түрі келесідей беріледі:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (0.1)$$

мұндағы $a > 0$ — тұрақты, $u(x, t)$ — белгісіз функция.

Гурса есебі келесі түрде қойылады:

$$u|_{\Gamma_1} = f(s), \quad u|_{\Gamma_2} = g(s), \quad (0.2)$$

мұндағы Γ_1 және Γ_2 — теңдеуге берілген сипаттамалар, $f(s)$ және $g(s)$ — берілген функциялар.

1 Сипаттамалар және Гурса есебі

Екінші ретті гиперболалық теңдеулер үшін сипаттамалар $x \pm at = \text{const}$ түрінде беріледі. Яғни, теңдеудің сипаттамалық сызықтары:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a.$$

Гурса есебінде бастапқы деректер сипаттамалар бойымен берілген. Сол себепті теңдеудің шешімін табу үшін Риман әдісін қолданамыз.

2 Риман функциясы

Риман функциясы $R(x, t; \xi, \tau)$ — бұл теңдеудің белгілі бір нүктедегі шешімін бастапқы немесе шекаралық деректер арқылы көрсетуге мүмкіндік беретін арнайы функция. Риман функциясы импульстік әсердің нүктеден нүктеге таралуын сипаттайды. Ол

1. R теңдеуді қанағаттандырады:

$$R_{tt} - a^2 R_{xx} = 0.$$

2. Берілген нүктеде:

$$R(x, \tau; \xi, \tau) = 0, \quad x \neq \xi.$$

3. Белгілі бір бағытта:

$$R_\tau(x, \tau; \xi, \tau) + a R_x(x, \tau; \xi, \tau) = 0.$$

Гиперболалық теңдеу үшін қарапайым жағдайда:

$$R(x, t; \xi, 0) = \frac{1}{2a} H(at - |x - \xi|),$$

мұндағы H — Хевисайд функциясы.

3 Риман әдісімен Коши есебінің шешімі

Коши есебінің шешімі Риман әдісі арқылы былай беріледі:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (3.1)$$

Бұл формула Даламбертің формуласымен толық сәйкес келеді. - Бірінші қосынды бастапқы ығысу $\varphi(x)$ -ны сипаттайды. - Екінші интеграл бастапқы жылдамдық $\psi(x)$ -дан туындайды. - Риман әдісі арқылы гиперболалық теңдеудің Коши есебін сипаттамалар бойымен шешуге болады. - Нәтижесінде Даламбер формуласы шығады, ол бастапқы ығысу мен жылдамдықты интегралдық түрде көрсетеді. - Бұл әдіс гиперболалық теңдеулерді шешуде фундаментальды рөл атқарады.

Риман әдісі

Риман әдісі (Риман–Вольтерра әдісі) — екі тәуелсіз айнымалысы бар 2-ретті сызықтық гиперболалық типті теңдеулер үшін Гурса есебі мен Коши есебін шешу әдісі.

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y). \quad (1)$$

Риман әдісінде негізгі рөлді **Риман функциясы** атқарады:

$$R = R(x, y; \xi, \eta),$$

ол берілген a, b, c және f функциялары туралы белгілі бір жорамалдар кезінде арнайы Гурса есебінің шешімі ретінде бірімәнді анықталады:

$$R(\xi, y; \xi, \eta) = \exp \left(\int_{\eta}^y a(\xi, t) dt \right), \quad R(x, \eta; \xi, \eta) = \exp \left(\int_{\xi}^x b(t, \eta) dt \right).$$

Бұл функция **қосарланған (сопряжённое)** теңдеу үшін анықталады:

$$L^* R = R_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(aR) - \frac{\partial}{\partial y}(bR) + cR = 0.$$

R функциясы ξ, η айнымалылары бойынша келесі біртекті теңдеудің шешімі болып табылады:

$$R_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)R_{\xi} + b(\xi, \eta)R_{\eta} + c(\xi, \eta)R = 0.$$

Егер $a = b = 0$, $c = \text{const}$ болса, онда Риман функциясы келесідей өрнектеледі:

$$R = J_0 \left(\sqrt{4c(x - \xi)(y - \eta)} \right),$$

мұнда $J_0(z)$ — нөлінші ретті **Бессель функциясы**.

Риман функциясын сонымен қатар Вольтерраның интегралдық теңдеуін шешу арқылы да анықтауға болады. Риман функциясы $R(x, y; \xi, \eta)$ келесі интегралдық теңдеуді қанағаттандырады:

$$R(x, y; \xi, \eta) - \int_{\eta}^y a(x, \tau) R(x, \tau; \xi, \eta) d\tau - \int_{\xi}^x b(t, y) R(t, y; \xi, \eta) dt + \int_{\xi}^x dt \int_{\eta}^y c(t, \tau) R(t, \tau; \xi, \eta) d\tau = 1. \quad (2)$$

Риман әдісі Гурсса есебін шешу үшін келесідей іске асады: кез келген жеткілікті дәрежеде дифференциалданатын $u = u(x, y)$ функциясы үшін келесі тождество орындалады:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [u R(x, y; \xi, \eta)] - R(x, y; \xi, \eta) Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(\frac{\partial R}{\partial y} - a R \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[u \left(\frac{\partial R}{\partial x} - b R \right) \right].$$

Бұдан бөліп интегралдау арқылы кез келген u шешімі (1) теңдеуінің жүктелген интегралдық теңдеуінің шешімі болатыны шығады:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & R(x, y_0; x, y) u(x, y_0) + R(x_0, y; x, y) u(x_0, y) \\ & + \int_{x_0}^x \left[b(t, y_0) R(t, y_0; x, y) - \frac{\partial R(t, y_0; x, y)}{\partial t} \right] u(t, y_0) dt \\ & + \int_{y_0}^y \left[a(x_0, \tau) R(x_0, \tau; x, y) - \frac{\partial R(x_0, \tau; x, y)}{\partial \tau} \right] u(x_0, \tau) d\tau \\ & + \int_{x_0}^x dt \int_{y_0}^y R(t, \tau; x, y) f(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

(3) формуласынан Гурсса есебінің корректілігі шығады:

$$u(x, y_0) = \varphi(x), \quad u(x_0, y) = \psi(y), \quad \varphi(x_0) = \psi(y_0)$$

(1) теңдеуі үшін.

Риман әдісі (1) теңдеудің Коши есебін кез келген тегіс, характеристика емес қисықтағы бастапқы шарттармен шешуге мүмкіндік береді. Бұл әдіс Риман функциясын табуға және шешімді квадратура түрінде жазуға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар, Риман әдісі кең класс гиперболалық теңдеулер мен жүйелерге жалпыланған.

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. **3**
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. **3**
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. **3**
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. **3**

- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 3
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 3
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 3